

L'utilisation du Nombre d'Or dans la musique pour cordes, percussions et célesta de Bartòk

<http://alexandre-mesle.com>

11 septembre 2011

Table des matières

1	Introduction	2
2	Nombre d'Or et suite de Fibonacci	3
2.1	Nombre d'Or	3
2.2	Rectangle d'or	3
2.3	Exemples d'utilisation en peinture	3
2.4	Suite de Fibonacci	4
3	Musique pour cordes, percussions et célesta	6
3.1	Plan du mouvement	7
3.1.1	Tonalités des entrées	7
3.1.2	Nuances et Instrumentation	11
3.2	Proportions des différentes parties	12
4	En conclusion	12
A	Pour les matheux	13
A.1	Comment trouver le nombre d'Or ?	13
A.2	Inverse et carré de ϕ	13
A.3	Lien avec la suite de Fibonacci	13
	Bibliographie	13

1 Introduction

Dans toute pièce musicale (voire littéraire ou cinématographique) dans laquelle figure un climax se pose la question de l'emplacement de ce point culminant. Un des choix est de le disposer à la fin, faisant du climax l'aboutissement de la pièce. Une autre possibilité est de placer ce point au milieu, ou plutôt vers le milieu de la pièce, formant ainsi une symétrie autour du climax.

On affine dans ce cas la question en se demandant quels doivent être les rapports de proportion en la partie de la pièce qui précède le climax et celle qui lui succède. Il semble naturel de ne pas placer le climax exactement au milieu de la pièce, tout simplement parce que la partie qui lui succéderait serait trop longue.

La **section d'or**, ayant pour valeur approximativement $0.618\dots$ est un rapport de proportions maintes fois utilisé dans les arts plastiques pour des raisons esthétiques. La musique pour cordes, percussions et célesta de Bartók est un exemple d'utilisation de ce nombre en musique. Dans le premier mouvement de cette pièce, le climax est positionné au $0.618\dots$ -ème de la pièce, comme le schématise la figure 1

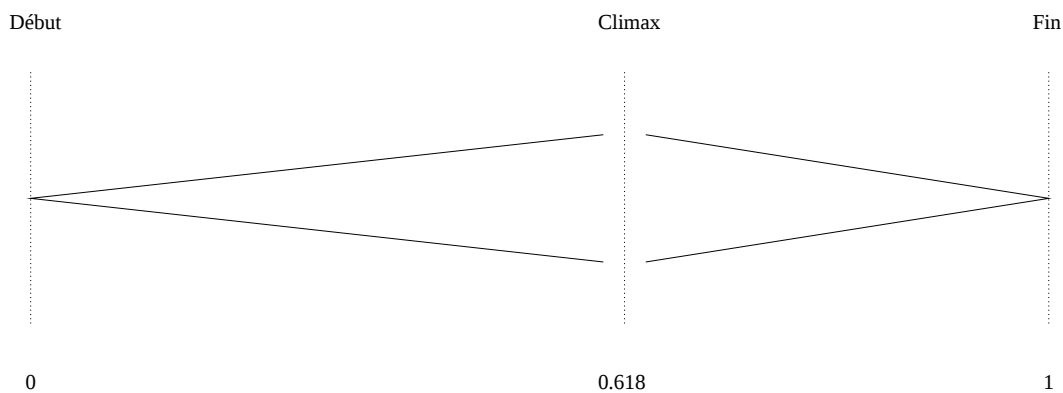


FIG. 1 – Position du climax

Bartók va beaucoup plus loin : le mouvement est, à un niveau de détail surprenant, construit avec la section d'Or. Nous commencerons par présenter succinctement le nombre d'Or. Ensuite nous verrons comment Bartók l'utilise dans le premier mouvement de la musique pour cordes, percussions et célesta.

2 Nombre d'Or et suite de Fibonacci

2.1 Nombre d'Or

Si l'on observe la figure 2, le **nombre d'Or**, noté ϕ , est celui qui permet d'avoir le rapport $\frac{tout}{grand} = \frac{grand}{petit}$

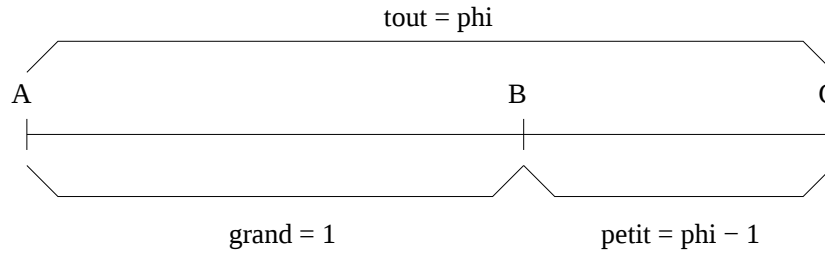


FIG. 2 – La section dorée

Si la grande partie est de longueur 1, on note autrement dit $\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi - 1}$. En résolvant cette équation (voir l'annexe A), on obtient $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$. Ce nombre est irrationnel (de par la présence de $\sqrt{5}$), cela signifie qu'il est impossible de l'obtenir en divisant deux nombres entiers. On appelle **section d'Or** la partie décimale du nombre d'Or, à savoir $0.6180339887 \dots$. Une propriété tout à fait surprenante est que la section d'Or est l'inverse du nombre d'Or. Autrement dit $0.6180339887 \dots = \frac{1}{1.6180339887 \dots}$.

2.2 Rectangle d'or

Le **rectangle d'or**, est un exemple d'utilisation du nombre d'or en arts plastiques.

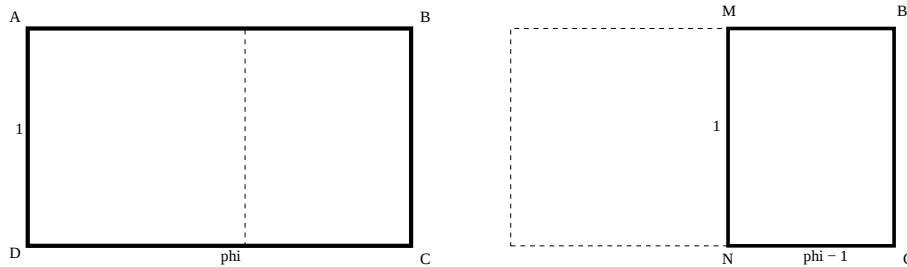


FIG. 3 – Grand rectangle à gauche, petit à droite

Si l'on caractérise un rectangle par le rapport entre sa longueur et sa largeur, le rectangle d'or est le seul rectangle tel que si l'on extrait un carré, comme indiqué dans le rectangle de gauche (figure 3), le petit rectangle que l'on obtient (celui de droite sur la figure 3) est le même que le rectangle de départ. Le rectangle d'or doit avoir les dimensions décrites dans la figure 4 : il doit être de largeur 1 et de longueur ϕ .

2.3 Exemples d'utilisation en peinture

Plusieurs peintres ont fait usage du nombre d'Or, entre autres Seurat dans le tableau *la parade* (figure 5). Cette exemple présente l'avantage de ne laisser la place à aucun doute sur l'utilisation du nombre d'Or.

Dans le domaine des arts plastiques, de nombreuses oeuvres sont considérées comme construites sur le nombre d'Or. Une sage réserve est toutefois nécessaire à partir du moment où les auteurs n'en font pas mention.

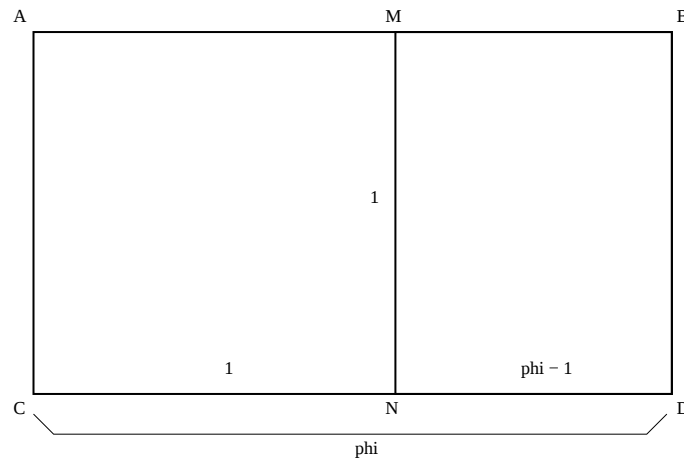


FIG. 4 – Un rectangle d'Or



FIG. 5 – La parade, de Seurat (1859-1891)

2.4 Suite de Fibonacci

L'irrationalité de ϕ fait qu'il est impossible d'obtenir le nombre d'or en divisant deux nombres entiers. Il est toutefois possible d'obtenir un nombre très proche de ϕ en choisissant des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est formée par les nombres suivants 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Ses deux premiers termes sont 0 et 1, tous les autres termes s'obtiennent en additionnant les deux précédents. Son lien avec ϕ se déduit en observant le quotient de deux termes consécutifs de cette suite :

i	u_{i+1}/u_i
1	$1/1 = 1$
2	$2/1 = 2$
3	$3/2 = 1.5$
4	$5/3 = 1.666666666 \dots$
5	$8/5 = 1.6 \dots$
6	$13/8 = 1.625$
7	$21/13 = 1.61538461538461538462 \dots$
8	$34/21 = 1.61904761904761904762 \dots$
9	$55/34 = 1.61764705882352941176 \dots$
10	$89/55 = 1.6181818181818181818 \dots$
11	$144/89 = 1.61797752808988764045 \dots$
...	...
50	$20365011074/12586269025 = 1.61803398874989484821 \dots$

On remarque qu'en divisant deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci, on s'approche de ϕ . Il est donc possible de s'approcher autant que l'on veut du nombre d'or en prenant deux termes consécutifs suffisamment loin dans cette suite. Si par exemple on prend les nombres de Fibonacci de rang 51 et 50, on obtient après division le nombre d'or à 9 décimales près. Il n'est cependant pas nécessaire d'aller aussi loin dans la suite, en prenant les termes de rang 11 et 10, à savoir 89 et 55, en obtient après division le nombre d'or à 3 décimales près. On remarque que comme la section d'Or est l'inverse du nombre d'Or, il suffit pour approcher la section d'Or de permuter dans la division le numérateur et le dénominateur.

3 Musique pour cordes, percussions et célesta

La musique pour cordes, percussions et célesta est une pièce en quatre mouvements composée en 1937 par Bartók. Elle doit une partie de sa popularité à l'utilisation par Stanley Kubrick du troisième mouvement dans le long-métrage *Shining*. Plusieurs analyses, à laquelle s'ajoute celle-ci, nous montre bon nombre de liens avec le nombre d'Or. Nous observerons en particulier le premier mouvement, dont voici le début :

Cette introduction, jouée uniquement avec les cordes, est construite en imitation exacte autour du motif suivant, énoncé à l'alto :

On remarque que conformément aux habitudes de Bartók, nous avons un thème construit en arche. Il est cependant d'une complexité mélodique qui l'éloigne des thèmes que l'on retrouve habituellement dans le folklore imaginaire de Bartók [1].

En observant la façon dont ce motif est développé, on peut identifier différentes parties dans ce mouvement. En considérant les rapports entre les nombres de mesures de ces parties, nous mettrons en évidence plusieurs liens avec le nombre d'or.

Une grande partie de l'analyse qui va suivre se recoupe avec les travaux de [2] et de [3].

3.1 Plan du mouvement

Nous utiliserons divers angles d'attaque pour mettre en évidence le plan de la pièce. La première approche s'obtient en observant les tonalités des entrées.

3.1.1 Tonalités des entrées

On remarque que la première note jouée est la. Bien que la tonalité du morceau (si elle existe) soit tout à fait discutable, nous considérerons que la tonalité de départ est la. Les entrées suivantes sont construites en imitation. La deuxième entrée est jouée à la mesure 5 à la quinte supérieure (donc en mi) par les violons :



entrées se font alternativement en montant et en descendant le cycle des quintes. Cela jusqu'à la mesure 45 où les deux extrêmes se rejoignent. Dans un premier temps, les entrées sont espacées de 4 mesures, comme indiqué dans la figure 7.

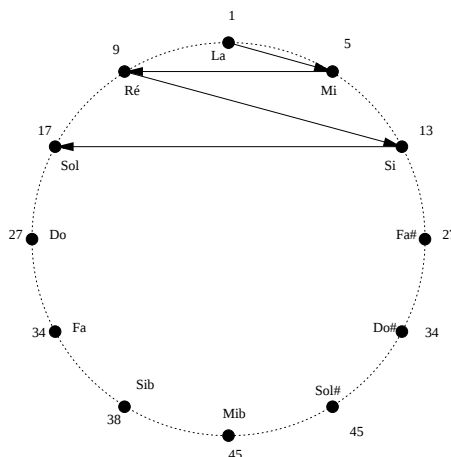


FIG. 7 – Entrées espacées

On observe qu'à partir de la mesure 17, il n'y a pas d'entrée pendant 10 mesures. A partir de la mesure 27, ce qui correspond aux entrées de do et fa#, nous avons deux entrées par mesure. Comme indiqué sur la figure 8.

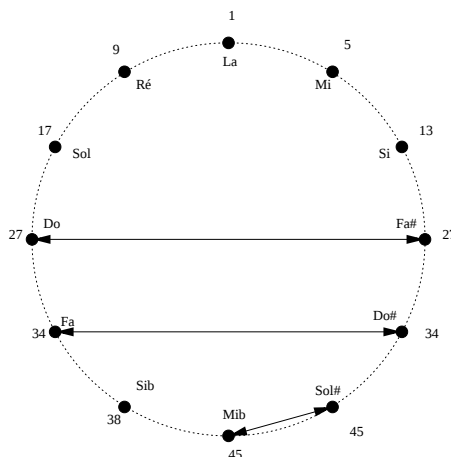
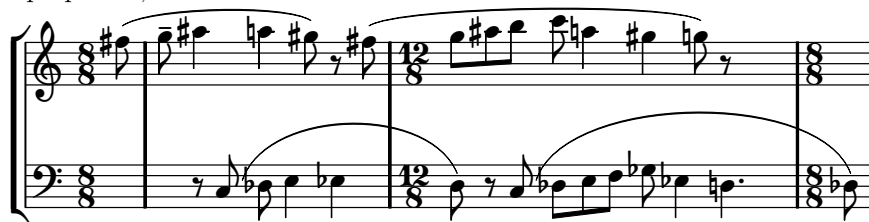


FIG. 8 – Entrées en canon

A la mesure 27 par exemple, les entrées du violon 1 et des contrebasses 1 et 2 sont décalées d'un temps et se superposent, formant ainsi un canon :



De même à la mesure 34, les tonalités do# et fa sont annoncées respectivement par le violon 2 et les altos 3 et 4 et ces entrées sont décalées d'un temps. L'annonce de la tonalité de Si b, à la mesure 38, met fin au canon. Nous restons pendant 10 mesures sans nouvelle entrée, stabilisé sur la tonalité de sib.

Le cycle des quintes est complété à la mesure 45 : les violons 1 et 2 annoncent la tonalité de *mi♭*, et un temps après les violoncelles 1 et 2 ainsi que les contrebasses annoncent la tonalité de *sol♯*.

Nous pouvons déjà proposer un plan en utilisant les positions des entrées comme critère.

mesure	partie	entrées
1	exposition	la (mesure 1), ré (mesure 5), mi (mesure 9), si (mesure 13) et do (mesure 17)
21	divertissement	aucune
27	canon	fa♯ et do (mesure 27), fa et do♯ (mesures 34 et 35)
38	pédale sib	Sib (mesure 38)
45	strette	mi♭ et sol♯ (mesure 45)

A partir de la mesure 56, le cycle des quintes est parcouru du *mi♭* vers le *la*. Les tonalités sont de nouveau annoncées, mais cette fois-ci dans l'ordre inverse comme le précise la figure 9.

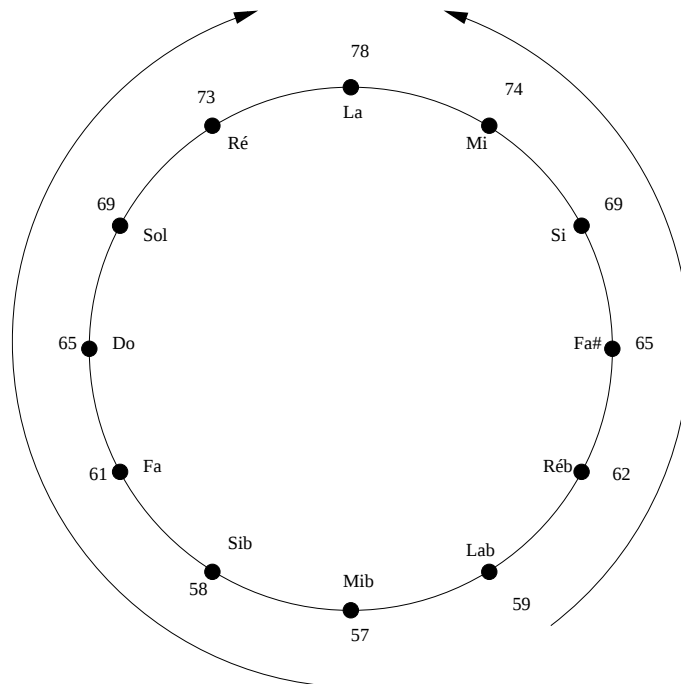


FIG. 9 – Retour au la

A partir de ce moment, toutes les entrées se font en mouvement contraire. Si on observe le thème de départ (en *la*) en mouvement contraire, on a



On observe, aussi bien au niveau des annonces des tonalités qu'au niveau des mouvements mélodiques un effet de symétrie. En toute subjectivité, l'effet obtenu est comparable à celui que l'obtient en déformant une surface réfléchissante qui, à partir d'un certain niveau de concavité (par exemple un rétroviseur posé du mauvais coté...), se met à refléter le monde à l'envers (un effet similaire est obtenu avec les lentilles des objectifs).

Pour revenir à des aspects qui mettront plus aisément les lecteurs en accord avec ma vision des choses. La première annonce est faite en *mi♭* à la mesure 57 (violons 3 et 4, violoncelles 3 et 4, contrebasses), où seule la tête du thème (*x*) est exposée :



A la mesure 59, les mêmes pupitres jouent la partie *y* du thème transposé en *lab* :



Ce découpage du thème est achevé à la mesure 62, où les violoncelles et les contrebasses annoncent la partie *z* du thème en *réb* :



La figure 10 nous montre comment les trois tonalités *mib*, *lab* et *réb* sont utilisées pour ré-exposer le thème en rapprochant les entrées (toutes les 2 mesures). Le thème ne s'expose qu'une fois, mais par fragments, provoquant un effet de chute libre. Cette instabilité est renforcé par le fait que thème est poursuivi une quinte plus bas à chaque fois qu'il est repris.

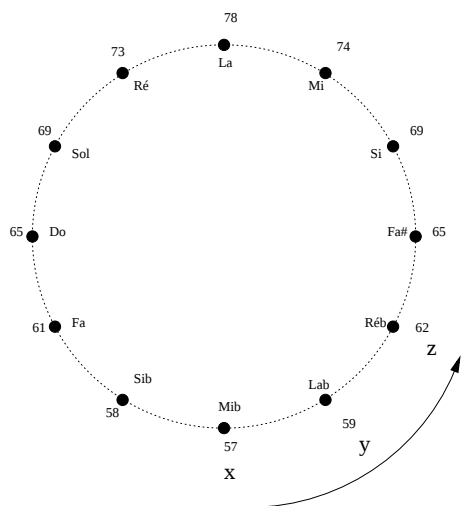
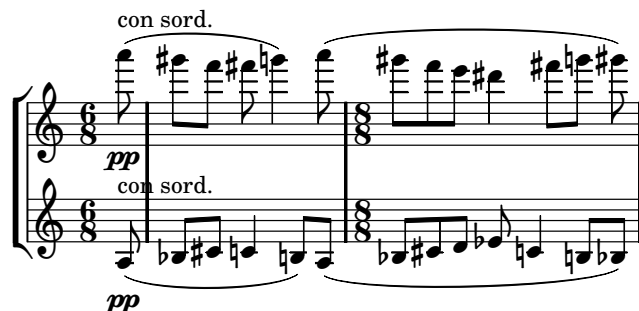


FIG. 10 – Ré-exposition du thème en trois parties

Pendant ce temps, les violons 1 et 2, ainsi que les altos remontent le cycle des quintes dans l'autre sens et annonçant les tonalités rencontrées en ne jouant qu'une seule note de chacune. On observe ci-dessous les violons 1 et 2 à partir de la mesure 56 :



Dans la lignée de l'effet décrit plus haut, trois tonalités sont annoncées en deux mesures, les violons descendant d'une quarte à chaque nouvelle annonce accentuent l'effet de chute libre. Les mesures à partir de 65 sont consacrées aux annonces de *do* et *fa#* en strette. De façon analogue au canon observé au début du mouvement, on observe l'annonce des tonalités de *sol* et *si* (mesure 69), puis *ré* et *mi* (mesure 73). Le cycle des quintes est refermé à la mesure 78 par l'annonce simultanée du thème (violons 1) et de son reflet (violons 4) :



La partie x du thème est, à la mesure 82, jouée en strette en alternance avec son reflet. Le mouvement est clôt par deux entrées simultanées de x (violons 1) et de son reflet (violons 2) joués en augmentation, et se terminant sur un la joué à l'unisson. Ces considérations nous amènent à proposer un découpage du mouvement à partir de la mesure 57 :

mesure	partie	entrées
57	exposition du thème inversé	mib (mesure 57), sib (mesure 58), lab (mesure 59), fa (mesure 61), réb (mesure 62)
65	strette	do et fa# (mesure 65)
69	canon	sol et si (mesure 69), ré et mi (73)
78	pédale mib	la et son reflet superposés (mesure 88)
82	strette	la et son reflet alternés (mesure 82)
86	coda	la et son reflet superposés (mesure 86)

3.1.2 Nuances et Instrumentation

En observant les nuances ainsi que l'instrumentation, il est possible d'affiner la plan élaboré précédemment :

- Dans toutes les entrées identifiées dans l'exposition ainsi que dans le divertissement, les cordes jouent *pp* avec sourdine.
- À partir du canon, toutes les nuances, y compris celles correspondant aux entrées (fa# et do), passent à *p*.
- Au début de la strette (mesure 35), la timbale entre sur une pédale de sib (doublé par les contrebasses 1 et 2) et au même moment, les annonces de do# et fa se font sans sourdine. Pendant les quatre mesures qui suivent, toutes les cordes enlèvent leurs sourdines tout en restant dans la nuance *p*.
- À la mesure 38, les contrebasses (1 et 2) et les violoncelles (1 et 2) annoncent la tonalité de sib, mettant fin au roulement de timbale. Toutes les nuances passent à ce moment-là à *mp*.
- Entre les mesures 40 et 45, les nuances croissent progressivement jusqu'à la mesure 45.
- À la strette (mesure 45), les dernières cordes (violons 1) entrent sur la nuance *f* en annonçant la tonalité de mib, le cycle des quintes est complété par l'annonce de sol# un temps après. L'écriture se densifie : les cordes jouent de plus en plus de croches et la nuance croît progressivement vers le *ff*.
- La cymbale (piatti) entre à la mesure 53, suivi par un roulement de timbale en crescendo qui aboutit à la mesure 56. Pendant ce temps, toutes les cordes (sauf les contrebasses) jouent *ff* en double cordes jusqu'à la mesure 56.
- À mesure 56, toutes les cordes jouent à l'unisson un mib dans la nuance *fff*.

Le tableau suivant résume les observations faites précédemment.

mesure	partie	nuance	instrumentation
1	exposition	<i>pp</i>	entrées progressives des cordes, avec sourdines,
21	divertissement	<i>pp</i>	cordes avec sourdines, sans entrée
27	canon	<i>p</i>	entrées progressives des cordes, avec sourdine
35		<i>p</i>	entrée de la timbale, les cordes enlèvent progressivement les sourdines
38		<i>mp</i>	cordes sans sourdine, pas d'entrée
45	strette	<i>f</i>	toutes les cordes, sans sourdine
54		<i>ff</i>	entrée de la cymbale puis des timbales, double cordes.
56	climax	<i>fff</i>	triangle, double cordes, tout l'orchestre à l'unisson.

- À partir des entrées de la mesure 57, Les nuances décroissent de façon vertigineuse vers le *p*.
- À la mesure 65, toutes les nuances sont à *p*.
- À la mesure 69, toutes les entrées de cordes se font avec sourdine.

- Le célesta entre p à la mesure 78, pendant que les cordes jouent le thème et son reflet pp , toujours avec les sourdines.
- Le célesta et la plupart des cordes sortent à la mesure 82 et les autres passent une à une au ppp .
- à la mesure 86, il ne reste plus que les violons 1 et 2.

On résume de même ces informations avec le tableau suivant :

mesure	partie	nuance	instrumentation
57	exposition du thème inversé	$fff \rightarrow p$	d'abord doubles cordes, toutes les entrées en simple corde
65	strette	p	cordes seules
69	canon	p	entrées avec les sourdines
78	pédale <i>mib</i>	pp	entrée du célesta
82	strette	ppp	sortie du célesta
86	coda	ppp	deux pupitres de cordes

3.2 Proportions des différentes parties

Une fois le plan du mouvement élaboré, on voit clairement apparaître une phase de montée (mesures 1 à 56) suivi d'une phase de descente (mesures 57 à 86). Rapportons au nombre de mesures que contient le mouvement le nombre de mesures précédant le climax : $\frac{55}{88} = 0.625 \dots$. On obtient la section d'Or à une décimale près. La proximité de ce quotient avec la section d'Or vient du fait que 55 et 89 sont des termes consécutifs de la suite de Fibonacci (il y a toutefois 88 mesures dans ce mouvement). Bartók, souhaitant que le climax se trouve sur la section dorée, a donc (presque) utilisé deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci. On l'observe en de nombreux points du plan 11 :

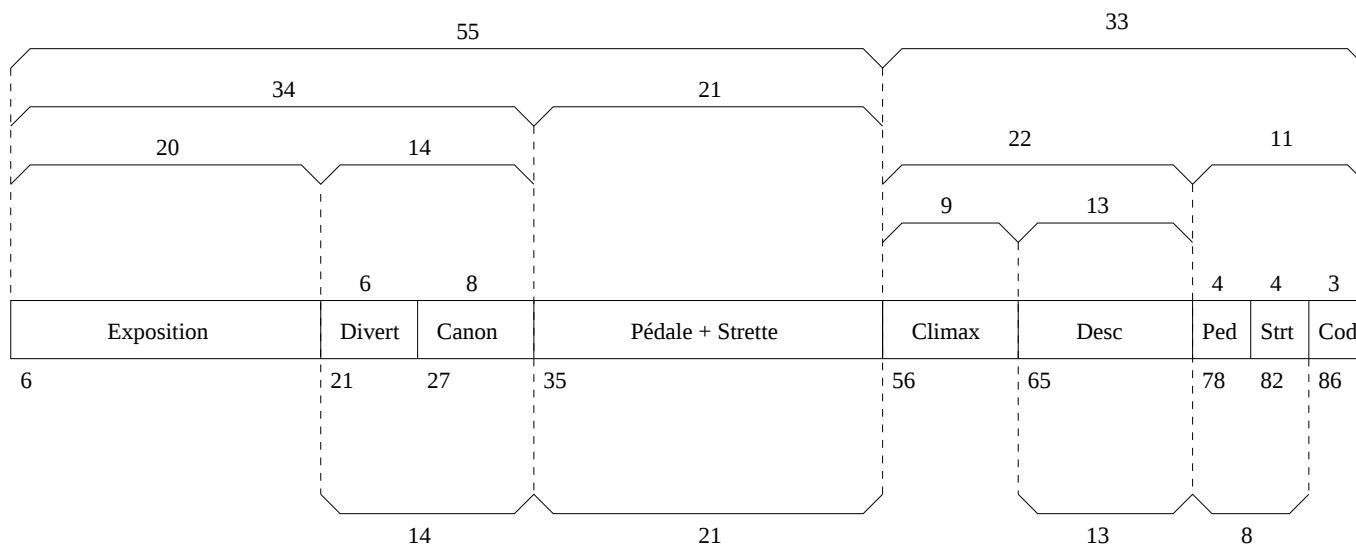


FIG. 11 – Plan

Ce plan représente les parties mises en évidence ci-avant. Les numéros se trouvant juste en dessous des cases sont les numéros de mesures. Les numéros à côté des onglets sont des nombres de mesures. On constate que les nombres de mesures ne sont en général pas exactement des nombres de la suite de Fibonacci. Il suffit cependant de prendre deux onglets côte à côte pour voir qu'ils contiennent des nombres de mesures proches des valeurs consécutives de la suite de Fibonacci. Il suffit de diviser le petit par le grand obtenir un quotient proche de la section d'Or.

4 En conclusion

Bartók n'est pas le seul compositeur à avoir fait usage du nombre d'Or pour positionner le climax ou plus généralement pour construire une pièce. On peut citer parmi d'autres Xénakis, qui est un des seuls compositeurs

à le reconnaître ouvertement. Bon nombre de musicologues proposent des analyses faisant apparaître le nombre d'Or dans des oeuvres, sans toutefois que les compositeurs étudiés n'aient mentionné une seule fois le nombre d'Or dans leurs écrits, par exemple les *Reflets dans l'eau* de Debussy [4]. Bartók lui-même a publié une analyse de la musique pour cordes, percussions et célesta sans évoquer la section d'Or [5].

Bon nombre de compositeurs ont tendance à placer le climax aux $\frac{2}{3}$ de leurs pièces, et vraisemblablement sans que cela soit le résultat d'un calcul. On constate cependant que Bartók ne s'est pas arrêté à cette question et est allé bien plus loin. Tout le mouvement est articulé autour de la section d'or. Et malgré l'absence totale de commentaires du compositeur à ce sujet, il est fort peu probable que la construction que nous venons d'observer ait été obtenue par hasard.

A Pour les matheux

A.1 Comment trouver le nombre d'Or ?

Partons de la relation $\frac{\phi}{1} = \frac{1}{\phi-1}$, on la re-écrit $\phi(\phi-1) = 1 \iff \phi^2 - \phi - 1 = 0$. Cette équation se résoud avec la méthode du discriminant : $\Delta = 5 > 0$ d'où l'existence de deux racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. La seule solution positive est donc $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nous noterons $\hat{\phi}$ la racine négative.

A.2 Inverse et carré de ϕ

De belles propriétés se démontrent en utilisant l'équation dont ϕ est la solution.

1. $\phi^2 - \phi - 1 = 0 \iff \phi^2 = \phi + 1$. Autrement dit le carré du nombre d'Or s'obtient en lui ajoutant 1.
2. $\phi^2 - \phi - 1 = 0 \iff 1 = \phi^2 - \phi \iff \frac{1}{\phi} = \phi - 1$. On remarque aussi que l'inverse du nombre d'Or s'obtient en lui retranchant 1.

A.3 Lien avec la suite de Fibonacci

On définit de façon formelle la suite de Fibonacci F de la façon suivante : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. le terme général de F est donné par $F_n = \phi^n - \hat{\phi}^n$ (se prouve aisément par récurrence). Cela explique pourquoi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$. On le vérifie après avoir constaté que comme $|\hat{\phi}| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{\phi}^n = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\phi^{n+1} - \hat{\phi}^{n+1}}{\phi^n - \hat{\phi}^n} \\ &= \frac{\frac{\phi^{n+1}}{\phi^n - \hat{\phi}^n} - \frac{\hat{\phi}^{n+1}}{\phi^n - \hat{\phi}^n}}{\phi^n - \hat{\phi}^n} \\ &\sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi^{n+1}}{\phi^n} \\ &= \phi \end{aligned}$$

Références

- [1] Boukobza. *Bartók et le folklore imaginaire*.
- [2] Lendvai. *Bélà bartók : An analysis of his music*.
- [3] <http://solomonsmusic.net/diss.htm>.
- [4] Roy Howart. *Debussy*.
- [5] Szabolcsi. *Bartók, sa vie et son oeuvre*.